QE SQUARE

QE スクエア

本欄は「会員の声」と同様，個人意見の主張の場であり，営利目的や誹謗等を除き，会員が自由に主張や意見を述べるためのスペースである。

●直交多項式展開の作法

(株)小松製作所 細井光夫

1. はじめに

多項式近似において，正規化されていない直交多項式で展開した「係数β」をそのまま評価するのは比較障害があって不適切である。また，原点を通らない多項式で展開すべきである。

直交多項式展開の作法について考えたことを以下に示すので，ご意見をいただければ幸いである。

2. 正規直交多項式

最小二乗法で**表1**に示す入出力のn個のデータセットを$(n-1)$次以下の多項式で近似する。

入力Mの関数である正規直交多項式を下記する。

$$\alpha_{00}$$
$$\alpha_{11}(M-\alpha_{10})$$
$$\alpha_{22}(M^2-\alpha_{21}M-\alpha_{20})$$
$$\alpha_{33}(M^3-\alpha_{32}M^2-\alpha_{31}M-\alpha_{30})$$

表記を簡単にするため，有効除数rを拡張した以下の式を使うことにする。

$$r_0=\sum_{i=1}^{n}M_i^{\,0}=\sum_{i=1}^{n}1=n$$
$$r_1=\sum_{i=1}^{n}M_i^{\,1}=\sum_{i=1}^{n}M_i$$
$$r_2=\sum_{i=1}^{n}M_i^{\,2}=r$$
$$r_p=\sum_{i=1}^{n}M_i^{\,p}$$

0次の正規直交多項式の正規性から，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{00}{}^2=1$$
$$\therefore\frac{1}{\alpha_{00}{}^2}=\sum_{i=1}^{n}1$$

表1 直交多項式展開の対象

入力	M_1	M_2	$\cdots$	M_n
出力	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

0次と1次の正規直交多項式の直交性から，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{00}\,\alpha_{11}(M_i-\alpha_{10})=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-\alpha_{10})=0$$
$$r_0\,\alpha_{10}=r_1$$
$$\therefore\alpha_{10}=r_0{}^{-1}r_1$$

1次の正規直交多項式の正規性から，

$$\sum_{i=1}^{n}\{\alpha_{11}(M_i-\alpha_{10})\}^2=1$$
$$\therefore\frac{1}{\alpha_{11}{}^2}=\sum_{i=1}^{n}(M_i-\alpha_{10})^2$$

0次と2次の正規直交多項式の直交性から，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{00}\alpha_{22}(M_i^{\,2}-\alpha_{21}M_i-\alpha_{20})=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}(M_i^{\,2}-\alpha_{21}M_i-\alpha_{20})=0$$
$$r_1\alpha_{21}+r_0\alpha_{20}=r_2$$

1次と2次の正規直交多項式の直交性から，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{11}(M_i-\alpha_{10})\,\alpha_{22}(M_i^{\,2}-\alpha_{21}M_i-\alpha_{20})=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}M_i(M_i^{\,2}-\alpha_{21}M_i-\alpha_{20})=0$$
$$r_2\alpha_{21}+r_1\alpha_{20}=r_3$$

連立方程式を行列式にまとめると，

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_0 \\ r_2 & r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$
$$\therefore\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_1 & r_0 \\ r_2 & r_1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

2次の正規直交多項式の正規性から，

$$\sum_{i=1}^{n}\{\alpha_{22}(M_i^{\,2}-\alpha_{21}M_i-\alpha_{20})\}^2=1$$
$$\therefore\frac{1}{\alpha_{22}{}^2}=\sum_{i=1}^{n}(M_i^{\,2}-\alpha_{21}M_i-\alpha_{20})^2$$

このように正規直交多項式の「係数α」は，直交性と正規性の制約から入力（$M_1, M_2, \cdots, M_n$）の値だけで計算することができる。

3次の正規直交多項式の直交性から，